LIMITES 10

Gil da Costa Marques

10.1 O Cálculo

Cálculo é uma palavra que deriva da palavra grega *calculus*. Essa palavra era empregada antigamente para designar uma pedra utilizada para contar, para efetuar cálculos, portanto. Hoje em dia ela tem muitos significados, pois existem muitas formas de efetuar contas, de calcular. Tendo isso em vista, a rigor, o **Cálculo** discutido a seguir deve ser entendido como uma abreviação para **Cálculo Infinitesimal** e ser subdivido em **Cálculo Diferencial** e **Cálculo Integral**.

> Trata-se de um ramo da Matemática no qual lidamos com grandezas que variam. Nesse sentido, o cálculo pode ser definido como a forma científica de lidar com as transformações que ocorrem no mundo físico.

O Cálculo tem evoluído significativamente desde as primeiras ideias envolvendo a determinação de áreas, a partir da divisão do todo em porções cuja área seja conhecida. Assim, suas origens remontam a séculos antes de Cristo. Newton e Leibniz recebem o crédito pela formulação original do Cálculo Infinitesimal. A formulação rigorosa do Cálculo recebe o nome de **Análise Matemática**.

Os conceitos mais importantes do Cálculo, além do de função, são os de limite, derivada e integral. O estudo de séries infinitas é, igualmente, um dos objetos de estudo dessa ciência. Esse tema, no entanto, será abordado apenas de passagem neste texto.

Neste texto, abordaremos o conceito de limite, que para alguns se origina no **método de exaustão**, formulado com um grau de precisão bastante alto por Eudóxio de Cnido (408 a.C. – 347 a.C.).

Para entender o conceito de limite, consideremos o problema da determinação da área do círculo delimitado por uma circunferência de raio R. Podemos resolver esse problema considerando polígonos regulares de n lados inscritos na circunferência. Para cada n, seja A_n a área do correspondente polígono. Como resultado temos, como entendera Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C), que a área do círculo pode ser aproximada pela expressão:

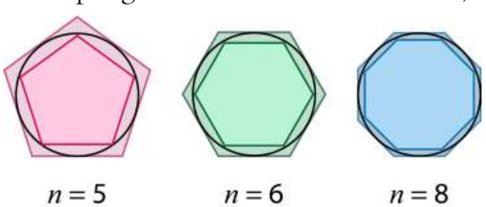

Figura 10.1: Para cada circunferência, o polígono inscrito e o polígono circunscrito para alguns valores de n.

$$\pi R^2 \cong A_n \qquad (10.1)$$

com um resultado cada vez melhor à medida em que o número n cresce indefinidamente.

O mesmo problema também pode ser resolvido considerando os polígonos regulares circunscritos à mesma circunferência, chegando-se evidentemente a resultados análogos.

O valor da área do polígono se aproxima do resultado exato para a área do círculo à medida que aumentamos paulatinamente o número de lados do polígono inscrito ou circunscrito. Assim, definimos um processo limite, mediante o qual, à medida que o número de lados dos polígonos cresce indefinidamente, obtemos o resultado procurado, o resultado exato.

Uma vez resolvido o problema da determinação da área do círculo, o número π pode ser definido, por exemplo, como o limite, quando o número de lados do polígono inscrito tende a infinito, da área desse polígono, dividido pelo quadrado do raio da circunferência:

$$\pi = \frac{1}{R^2}\lim_{n\to\infty} A_n \qquad 10.2$$

A rigor, o tratamento proposto por Arquimedes para determinar o número π envolvia considerações sobre polígonos inscritos bem como circunscritos à circunferência, utilizando o método da exaustão.

O número π é um número irracional, ou seja, é um número que não é racional. Isto é, não pode ser escrito na forma de um quociente de dois números inteiros, sendo o divisor diferente de zero. A representação decimal de π é não periódica e possui um número infinito de casas decimais.

O número e, outro número fundamental da Matemática e da Física, também é irracional e é igualmente definido como um limite:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cong 2{,}71828182845 \qquad 10.3$$

onde n é um número natural, isto é, a sequência de números $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o número e.

Pode-se provar que o mesmo número também pode ser escrito como

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

onde x é um número real.

10.2 Definição de limite

O conceito de limite ocupa um papel central no Cálculo Infinitesimal. Isso ocorre porque, como se verá a seguir, no Cálculo Diferencial, a derivada de uma função, de acordo com a definição de Cauchy, é introduzida por meio de um processo limite e, no Cálculo Integral, para introduzir a integral de uma determinada função num dado intervalo, considera-se o limite de uma soma de Riemann.

Limite é, portanto, um conceito básico do Cálculo e da Análise Matemática.

Para entender tal conceito, consideremos o exemplo de um objeto atirado a partir do chão na direção vertical com uma velocidade de 10 m/s. Adotando-se para a aceleração da gravidade local o valor de 10 m/s^2, sua altura, h, expressa em metros e determinada a partir da superfície, como função do tempo t, expresso em segundos, é dada por:

$$h(t) = -5t^2 + 10t \quad 10.4$$

enquanto sua velocidade, na unidade m/s, será dada por:

$$V(t) = 10 - 10t \quad 10.5$$

Da expressão acima, concluímos que, depois de 1 segundo, o objeto para instantaneamente no ar, retornando em seguida. Podemos agora considerar uma situação em que gostaríamos de saber qual a tendência da altura quando consideramos valores do tempo cada vez mais próximos de um determinado valor. Consideremos, por exemplo, o caso em que esse valor seja igual a 1 segundo. Como sabemos, esse tempo é aquele em que o objeto atinge a sua altura máxima – para perceber tal fato, basta examinar o vértice da parábola, que é o gráfico da função h. Anotando-se os valores da altura, para valores cada vez mais próximos de 1 segundo, notamos que eles se aproximam cada vez mais do valor 5 metros. Dizemos que esse valor é o limite da altura quando o tempo tende ao valor 1 segundo, e escrevemos:

$$\lim_{t \to 1} h(t) = 5 \quad 10.6$$

Assim, considerando-se uma função arbitrária $f(x)$, quando escrevemos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0 \tag{10.7}$$

que se lê: "o limite da função $f(x)$ quando x tende a x_0 é f_0" – isso significa que $f(x)$ pode ser feita tão próxima de f_0 quanto desejarmos, tomando valores de x suficientemente próximos de x_0 (mas, em geral, diferentes de x_0).

Uma definição mais rigorosa de limite será apresentada a seguir. Para isso, no entanto, devemos recapitular o conceito de intervalo aberto.

Dados dois números a e b sobre o eixo real, sendo $a < b$, considerando-se o conjunto de números reais compreendidos entre eles, podemos definir quatro tipos de conjuntos, aos quais damos o nome de intervalos. Cada um deles se diferencia pela inclusão ou não desses números no referido conjunto. No caso do ponto a, a inclusão é representada pelo símbolo "[" sucedido pela letra a e a exclusão é representada pelo símbolo "]" sucedido pela letra a. Para o ponto b, a convenção se inverte.

Definimos, assim, o **intervalo fechado** como o conjunto que inclui os números a e b e o representamos por:

$$[a,b] \tag{10.8}$$

O **intervalo aberto** é um conjunto do qual os pontos a e b estão excluídos. Ele é representado por:

$$]a,b[\tag{10.9}$$

Definimos de forma análoga os intervalos semiabertos ou semifechados:

$$[a,b[\text{ e }]a,b] \tag{10.10}$$

Definimos também a distância entre dois números x_1 e x_2 como o módulo da sua diferença:

$$d\left(x_1, x_2\right) = \left|x_1 - x_2\right| \qquad 10.11$$

sendo que o módulo de um número foi definido no primeiro texto, no qual tratamos da **Introdução à teoria dos conjuntos**. No caso de uma função, definimos, analogamente, a distância entre os números associados às respectivas imagens:

$$d\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) = \left|f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)\right| \qquad 10.12$$

Definição

Seja uma função $f(x)$ definida num intervalo aberto que contém o número x_0 (admitimos a possibilidade de que ela não seja definida para ele). Dizemos que o limite da função $f(x)$ é f_0, quando x tende a x_0, e representamos tal fato por:

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = f_0 \qquad 10.13$$

se – e somente se – para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que $d\left(f(x), f_0\right) < \varepsilon$ sempre que $0 < d\left(x, x_0\right) < \delta$.

Essa definição é conhecida popularmente como **definição $\varepsilon - \delta$**.

Pode-se definir limite, alternativamente, a partir do conceito de vizinhança.

Assim, dizer que o limite de $f(x)$ é f_0 significa que $f(x)$ pode ser feito tão próximo de f_0 quanto quisermos, fazendo x suficientemente próximo de x_0 (sem, contudo, fazê-lo igual a esse valor).

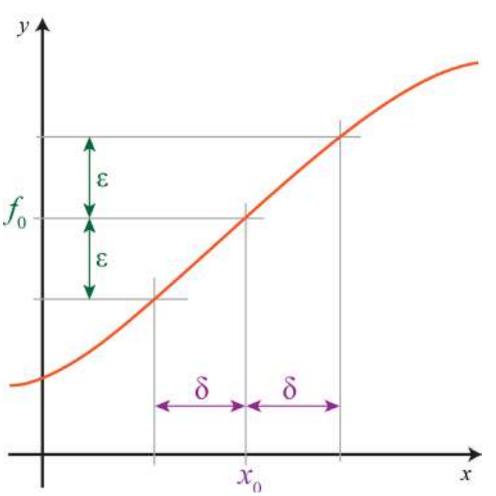

Gráfico 10.1: Gráfico com a definição ε – δ de limite.

Verifique

$$\lim_{x \to 3}(x^3 - 3x^2 + 2) = 2 \text{ e } \lim_{x \to 3}\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Exemplos resolvidos

Vamos determinar alguns limites:

a. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{x-1} =$

O gráfico da função $f_1(x) = \sqrt[3]{x-1}$ é exibido no **Gráfico 10.2**.

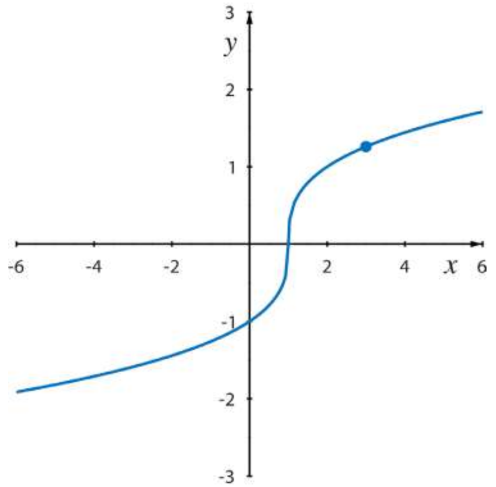

Gráfico 10.2: Gráfico de $f_1(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

Observamos que a função f_1 está definida no ponto $x = 3$ e $f(3) = \sqrt[3]{2}$. Portanto, $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{x-1} = \sqrt{2}$.

b. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{9x^2-1}{x-\dfrac{1}{3}}=\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{9\left(x^2-\dfrac{1}{9}\right)}{x-\dfrac{1}{3}}\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)}{x-\dfrac{1}{3}}=\lim\limits_{x\to 1/3}9\left(x+\dfrac{1}{3}\right)=6$

O gráfico da função $f_2(x)=\dfrac{9x^2-1}{x-\dfrac{1}{3}}$ é exibido no **Gráfico 10.3**.

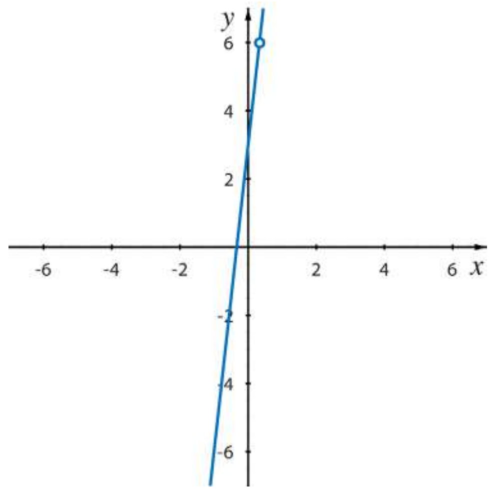

Gráfico 10.3: Gráfico de $f_2(x)=\dfrac{9x^2-1}{x-\dfrac{1}{3}}$.

Observamos que o **Gráfico 10.3** de f_2 é uma reta sem o ponto de coordenadas $\left(\dfrac{1}{3},6\right)$. De fato, a função f_2 não está definida no ponto $x=\dfrac{1}{3}$.

c. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+2\right)=4$

O gráfico da função $f_3(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$:

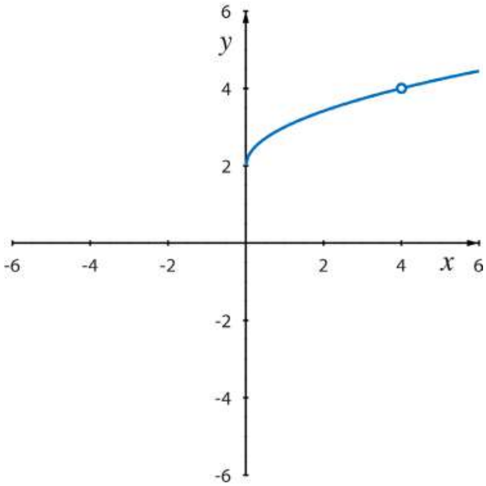

Gráfico 10.4: Gráfico de $f_3(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$.

Observamos que o **Gráfico 10.4** de f_3 coincide com o gráfico da função $g(x)=\sqrt{x}+2$ exceto no ponto $x = 4$, onde f_3 não está definida, mas g está definida e $g(4) = 4$.

Nos exemplos **b** e **c**, convém observar que o cálculo do limite não é tão direto como no exemplo **a**. Ocorre que, em **b** e **c**, para poder calcular o limite, é preciso sair da situação incômoda que é o quociente da forma $\dfrac{0}{0}$ para o qual a fração dada tende.

10.3 Funções contínuas e descontínuas

Para introduzir o conceito de função contínua, vamos partir da análise dos gráficos de algumas funções. No **Gráfico 10.5**, apresentamos gráficos de funções contínuas no intervalo exibido em cada caso.

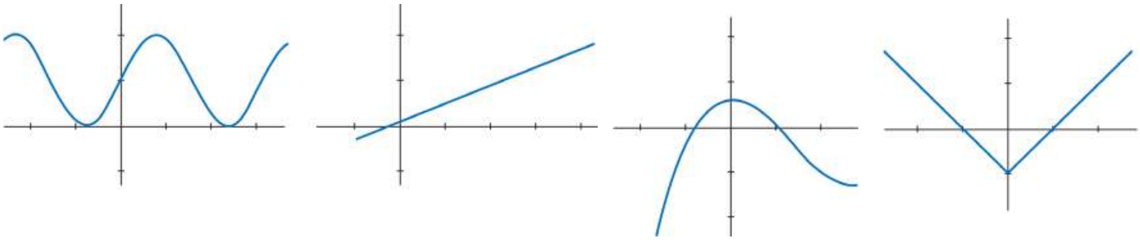

Gráfico 10.5: Gráficos de funções contínuas.

Entretanto, uma função do tipo $f(x)=\dfrac{1}{x}$, que não está definida em $x = 0$, é contínua em todo o seu domínio, isto é, no conjunto $\mathbb{R}^*$, isto é, $\mathbb{R} - \{0\}$, apesar de não ser contínua no intervalo $[-3, 3]$, exibido no **Gráfico 10.6**, pois não é contínua em $x = 0$, onde não está definida.

A definição de função contínua num ponto envolve três condições. Dizemos que uma função f é contínua no ponto x_0 se e somente se:

i. $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, isto é, existe o valor $f(x_0)$

ii. Existe o $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

iii. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

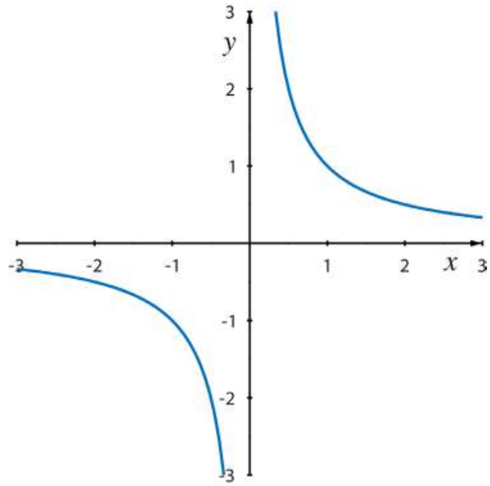

Gráfico 10.6: Gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Convém tecer algumas observações a respeito da definição acima.

Em primeiro lugar, se uma função não é definida num determinado ponto, não tem sentido questionar sua continuidade nesse ponto. É o caso, por exemplo, da função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ e o ponto $x = 0$.

Agora, considerando a função

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

que está definida em $x = 0$, satisfaz a primeira condição da definição, mas não a segunda e, consequentemente, nem a terceira. Logo, não é contínua em $x = 0$.

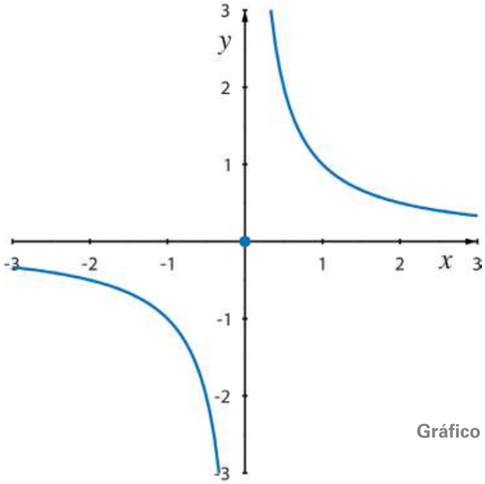

Gráfico 10.7: Gráfico de $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$.

Em segundo lugar, vale a pena observar o caso da função:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3} & \text{se } x\neq -3\\ 2 & \text{se } x=-3\end{cases}$$

e o ponto $x=-3$.

Nesse caso, a primeira condição da definição de função contínua está satisfeita, pois h existe em $x=-3$; a segunda condição da definição também está satisfeita, pois

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3).(x+3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x-3)=-6$$

mas a terceira não, uma vez que o valor desse limite não é igual ao valor da função no ponto $x=-3$. De fato,

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=-6 \text{ e } h(-3)=2.$$

Logo, a função h não é contínua no ponto $x=-3$.

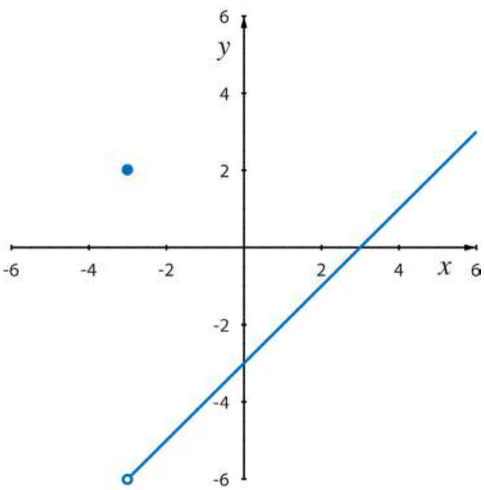

Gráfico 10.8: Gráfico de $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3} & \text{se } x\neq -3\\ 2 & \text{se } x=-3\end{cases}$.

No **Gráfico 10.9**, observamos uma função que é descontínua no ponto $x = 3$. Convém notar que ela está definida nesse ponto, mas que, mesmo visualmente, se percebe que não existe o limite quando x tende a 3.

No **Gráfico 10.10**, observamos outra função que não é contínua em $x = x_0$. Nesse caso também, ela está definida nesse ponto, mas não existe o limite quando x tende a x_0.

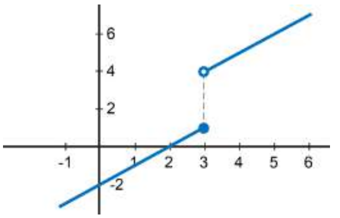

Gráfico 10.9: Gráfico de função descontínua no ponto $x = 3$.

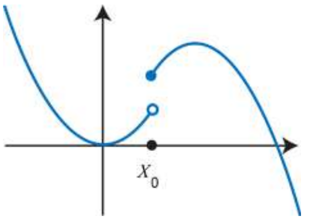

Gráfico 10.10: Gráfico de função descontínua no ponto $x = x_0$.

Finalmente, uma observação importante é a seguinte: a continuidade de uma função é um conceito local. Dizemos que uma função é contínua num dado conjunto quando ela é contínua em cada ponto desse conjunto. E dizemos simplesmente que uma função é contínua quando ela é contínua em cada ponto de seu domínio.

Exemplos resolvidos

1. Vamos verificar, pela definição, que as seguintes funções são contínuas no ponto indicado.

a. $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ em $x_0 = 1$:

- $x_0 = 1$ pertence ao domínio da função e $f(1) = 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}\left(\sqrt[3]{x} - 1\right) = 0$
- Consequentemente, $\lim\limits_{x \to 1}\left(\sqrt[3]{x} - 1\right) = f(1) = 0.$

Assim, estando satisfeitas as três condições da definição, temos que f é contínua em $x_0 = 1$.

b. $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ no ponto $x_0 = 1$:

- $x_0 = 1$ pertence ao domínio da função e $g(1) = \dfrac{\ln 1}{1} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- Consequentemente, $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1) = 0.$

Assim, estando satisfeitas as três condições da definição, temos que g é contínua em $x_0 = 1$.

2. Dada a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ L & \text{se } x = 4 \end{cases}$

determine o valor de L a fim de que a função f seja contínua em $x = 4$.

Observamos que a função f no ponto $x = 4$ tem valor L. A fim de que f seja contínua nesse ponto, basta tomarmos $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = L = f(4)$.

Como $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} (x + 4) = 8$

Assim $L = 8$.

10.4 Limites quando a variável independente cresce indefinidamente em valor absoluto

Adotamos o símbolo

$$\infty \tag{10.14}$$

que se lê "infinito", para representar valores de grandezas que não sejam superados por outros. Dizer que o valor de algo tende a infinito significa que estamos considerando valores dessa grandeza superiores a qualquer outro que possamos imaginar.

Vamos analisar o caso do limite de uma função em que a variável independente tende a $+\infty$ ou a $-\infty$.

Definição

Seja f uma função definida em $]a, +\infty[$. Dizemos que o limite da função $f(x)$ é L, quando x tende a $+\infty$, e representamos tal fato por:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \tag{10.15}$$

se – e somente se – para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ com $\delta > a$ tal que $x > \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.
Analogamente, seja f uma função definida em $]-\infty, a[$. Dizemos que o limite da função $f(x)$ é L, quando x tende a $-\infty$, e representamos tal fato por:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se – e somente se – para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ com $-\delta < a$ tal que $x < -\delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

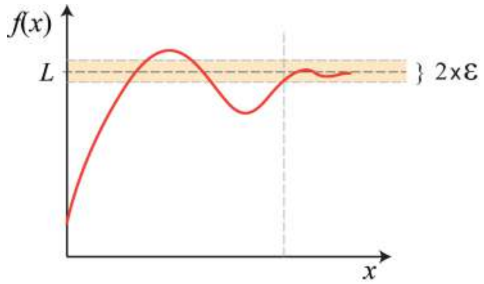

Gráfico 10.11: O limite dessa função existe no infinito.

Exemplo fundamental e muito útil para o cálculo de diversos limites é o

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

ou o

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Graficamente, ambos os limites podem ser visualizados no **Gráfico 10.12**.

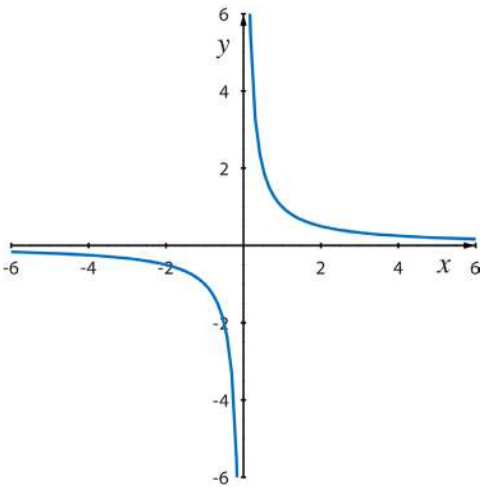

Gráfico 10.12: A função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exemplos resolvidos

Podemos observar o cálculo dos limites seguintes:

a. $$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^4 - 3x^2 + 2}{x^4 + 9x^2 + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(4 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right)}{x^4\left(1 + \frac{9}{x^2} + \frac{5}{x^4}\right)} = 4$$

uma vez que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

b. $$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 3x + 7}{x^4 + 9x^2 + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{x^4\left(1 + \frac{9}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right)} = 0$$

c. $$\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 + 4}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 + 4}\right)\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 4)}{\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{x + \sqrt{x^2 + 4}} = 0$$

10.5 Limites infinitos

Os valores da variável dependente podem crescer indefinidamente. Agora estamos falando de limites para os quais, quando a variável x se aproxima de um valor, digamos x_0, a função cresce em valor absoluto, tendendo a $+\infty$ ou a $-\infty$.

Se uma função f é bem definida numa vizinhança que contenha o valor x_0 (definida em ambos os lados de x_0), exceto possivelmente em x_0, então, a expressão

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad 10.16$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tomando x suficientemente próximo de x_0, mas não igual a x_0.

Analogamente, considerando f uma função definida numa vizinhança de x_0, exceto possivelmente no valor x_0, então, quando escrevemos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \qquad 10.17$$

isso significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, ao tomarmos valores de x suficientemente próximos de x_0, mas não iguais a x_0.

Como exemplo, podemos considerar a função exponencial $f(x) = e^x$ e a função logarítmica $g(x) = \ln x$, para as quais temos:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \ \text{ e } \ \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

ou

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \ \text{ e } \ \lim_{x \to -\infty} e^x = +\infty$$

bem como

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Verifique!

10.6 Limites laterais

Ao examinar uma função numa vizinhança de um ponto x_0, ocorre que, em alguns casos, o comportamento da função quando x está próximo de x_0, mas assume valores menores que x_0, é completamente diferente do comportamento da mesma função, quando x está próximo de x_0, mas assume valores maiores do que x_0.

Por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} x-5 & \text{se } x<1 \\ 3 & \text{se } x=1 \\ 1-2x & \text{se } x>1 \end{cases}$$

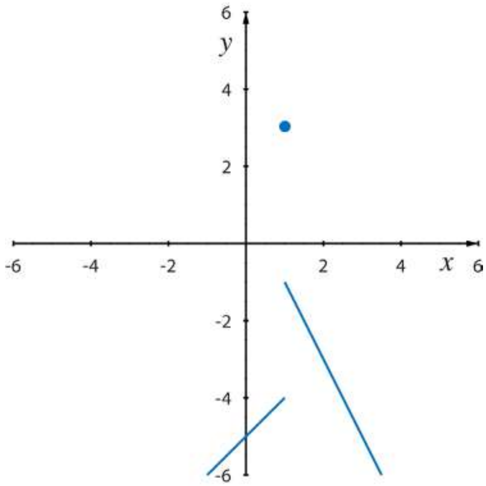

Gráfico 10.13: Gráfico de $f(x) = \begin{cases} x-5 & \text{se } x<1 \\ 3 & \text{se } x=1 \\ 1-2x & \text{se } x>1 \end{cases}$

A função f não é contínua em $x = 1$. Observamos que, para valores próximos de $x = 1$, mas menores do que 1, os correspondentes valores da função são próximos de -4, menores do que -4; para valores próximos de $x = 1$, mas maiores do que 1, os correspondentes valores da função são próximos de -1, menores do que -1. Nesse caso, dizemos que o limite à esquerda da função f para x tendendo a 1, por valores menores do que 1, difere do limite à direita da função f para x tendendo a 1, por valores maiores do que 1.

Dizemos que o limite à esquerda da função $f(x)$ é L_1, quando x tende a x_0, por valores menores do que x_0 – indicando tal fato por $x \to x_0^-$ – e representamos tal operação por:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1 \qquad (10.18)$$

se – e somente se – para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente $\delta > 0$ tal que se $x_0 - \delta < x < x_0$, então, $|f(x) - L_1| < \varepsilon$.

Analogamente, dizemos que o limite à direita da função $f(x)$ é L_2 quando x tende a x_0, por valores maiores do que x_0 – indicando tal fato por $x \to x_0^{\ +}$ – e representamos tal operação por:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2 \qquad 10.19$$

se – e somente se – para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que, se $x_0 < x < x_0 + \delta$, então, $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

Um exemplo em que os limites laterais da função, quando x tende a 0, são diferentes é o caso de:

$$f(x) = \left(1 + 2^{-\frac{1}{x}}\right)^{-1} \qquad 10.20$$

Analisemos o que ocorre com essa função quando nos aproximamos do valor de $x = 0$ pela direita. Encontramos para esse limite à direita o seguinte valor:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(1 + 2^{-\frac{1}{x}}\right)^{-1} = 1 \qquad 10.21$$

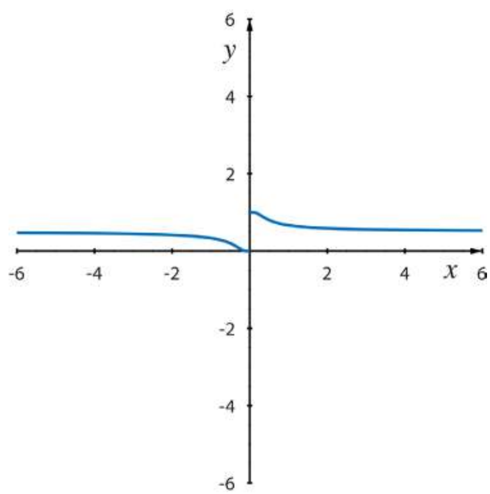

Gráfico 10.14: Gráfico de $f(x) = \left(1 + 2^{-\frac{1}{x}}\right)^{-1}$

De fato,

$$\lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} 2^{-\frac{1}{x}} = 0$$

de onde

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + 2^{-\frac{1}{x}} \right)^{-1} = 1$$

No entanto, o limite à esquerda é dado por:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(1 + 2^{-\frac{1}{x}} \right)^{-1} = 0 \qquad 10.22$$

pois

$$\lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{x} \right) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} \left(1 + 2^{-\frac{1}{x}} \right) = +\infty$$

de onde

$$\lim_{x \to 0^-} \left(1 + 2^{-\frac{1}{x}} \right)^{-1} = 0$$

Outro exemplo interessante é o caso da função $f(x)=\dfrac{|3x+1|}{3x+1}$.

Em primeiro lugar, a função f não está definida no ponto $x=-\dfrac{1}{3}$. Observamos que f também pode ser escrita de outra maneira:

$$f(x)=\frac{|3x+1|}{3x+1}=\begin{cases}\dfrac{3x+1}{3x+1} & \text{se} \quad x>-\dfrac{1}{3}\\[2ex] \dfrac{-(3x+1)}{3x+1} & \text{se} \quad x<-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

ou seja,

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se} \quad x>-\dfrac{1}{3}\\[2ex] -1 & \text{se} \quad x<-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

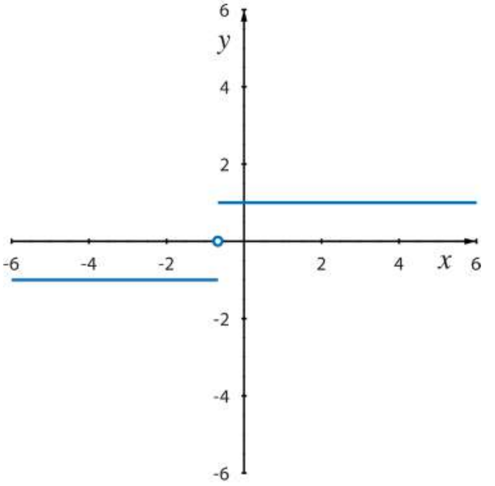

Gráfico 10.15: Gráfico de $f(x)=\dfrac{|3x+1|}{3x+1}$.

Convém observar que não existe $\lim\limits_{x\to -1/3} f(x)$, mas que $\lim\limits_{x\to -1/3^+} f(x)=1$, ao passo que $\lim\limits_{x\to -1/3^-} f(x)=-1$. Evidentemente, f não é contínua no ponto $x = -1/3$.

10.7 Alguns Teoremas sobre limites

A seguir, apresentaremos alguns teoremas úteis para o cálculo de limites. As demonstrações podem ser encontradas em livros de **Análise Matemática**.

Teorema 1

Se uma função tem limite num ponto, então, ele é único.

Teorema 2

O limite de uma constante é a própria constante.

Teorema 3

Existe o limite finito de uma função se – e somente se – os limites laterais são iguais.

Convém observar que o fato de o limite no ponto x_0 existir não garante que a função seja contínua nesse ponto. É o caso, por exemplo, de:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ 1 & \text{se } x = 4 \end{cases}$$

para a qual temos que $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 8$, mas $f(4) = 1$ e, portanto, f não satisfaz a terceira condição da definição de função contínua num ponto.

Teorema 4 – Teorema da conservação do sinal

Sendo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, então, para valores de x suficientemente próximos de x_0, $f(x)$ tem o mesmo sinal que L.

Teorema 5 – Limite da função composta

Sejam f e g duas funções tais que exista a função composta $g \circ f$, isto é, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ e g é uma função contínua em a, então, $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{u \to a} g(u)$.

Esse teorema é muito útil e convém notar que, sendo a função g contínua em a e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, então, $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(a) = g\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)$.

Por exemplo, a fim de calcular $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 8}{x + 2}}$, observamos inicialmente que:

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Logo,

$$\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{x^3+8}{x+2}} = \lim_{x\to -2}\sqrt[3]{x^2-2x+4}$$

Como a função raiz cúbica é contínua, então,

$$\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{x^2-2x+4} = \sqrt[3]{12}$$

e, portanto, $\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{x^3+8}{x+2}} = \sqrt[3]{12}$.

Teorema 6 – Teorema do Confronto

Se $f(x) \le g(x) \le h(x)$ numa vizinhança de x_0, exceto eventualmente em x_0, e se as funções f e h têm o mesmo limite quando x tende a x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L \qquad 10.23$$

então, o limite de g quando x tende a x_0 é o mesmo que o das funções f e h, ou seja,

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L \qquad 10.24$$

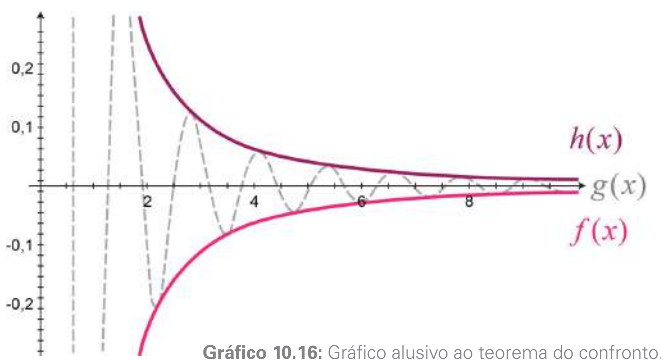

Gráfico 10.16: Gráfico alusivo ao teorema do confronto.

Por meio do Teorema do Confronto provam-se resultados importantes e um deles, o chamado limite fundamental, que é o seguinte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Teorema 7 – Consequência do Teorema do Confronto

Sejam f e g duas funções tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e g é limitada. Então, existe o limite $\lim\limits_{x \to a}\big(f(x).g(x)\big)$ e $\lim\limits_{x \to a}\big(f(x).g(x)\big) = 0$.

Teorema 8 – Propriedades dos limites

Sendo c uma constante, f e g duas funções tais que existem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$, então:

i. O limite da soma de duas funções é igual à soma dos respectivos limites.

- $$\lim_{x \to x_0}\big(f(x) + g(x)\big) = L_1 + L_2 = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) \qquad 10.25$$

Assim, por exemplo, podemos escrever:

- $$\lim_{x \to 0}\left(5x^2 + 3x + 10 + \operatorname{sen} x\right) = \lim_{x \to 0}\left(5x^2 + 3x + 10\right) + \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 10 \qquad 10.26$$

ii. O limite da diferença de duas funções é igual à diferença dos respectivos limites, isto é:

- $$\lim_{x \to x_0}\big(f(x) - g(x)\big) = L_1 - L_2 = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) \qquad 10.27$$

Por exemplo,

- $$\lim_{x \to 2}\left(x^4 + 3x - 5x^2\right) = \lim_{x \to 2}\left(x^4 + 3x\right) - \lim_{x \to 2} 5x^2 = 2 \qquad 10.28$$

iii. O limite do produto de duas funções é igual ao produto dos respectivos limites, isto é:

- $$\lim_{x \to x_0}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = L_1.L_2 = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) \qquad 10.29$$

Assim, podemos escrever:

$$\lim_{x\to 2}\left(2x^3+2x-4\right)\left(2x+1\right)=\lim_{x\to 2}\left(2x^3+2x-4\right).\lim_{x\to 2}\left(2x+1\right)=16\cdot 5=80 \qquad 10.30$$

iv. O limite do quociente de duas funções é o quociente dos seus limites, desde que o limite do denominador seja diferente de zero:

- $$\lim_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)/g\left(x\right)\right)=\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)/\lim_{x\to x_0} g\left(x\right) \qquad 10.31$$

Assim, podemos escrever:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x^4+2x-2}{2x^2+2}\right)=\frac{L_1}{L_2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(4x^4+2x-2\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+2\right)}=\frac{4}{4}=1 \qquad 10.32$$

Para poder usar as propriedades dos limites, é preciso tomar sempre o cuidado de verificar se as hipóteses estão satisfeitas – isto é, a existência do limite de cada uma das funções, com a hipótese adicional no caso do quociente de funções quando o limite do denominador não pode ser zero – sem o que essas propriedades não se aplicam.

Por exemplo, basta considerar:

- $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot x\right)$$

Evidentemente, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to 0}1=1$, mas não é igual ao produto dos limites, pois o limite do primeiro fator não existe.

- $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

Nesse caso, também o limite do quociente não é o quociente dos limites, porque limite do denominador é 0. Simplificando, porém, chegamos a $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=1$.

Teorema 9

Se f e g são contínuas em x_0 e c é uma constante, então, as seguintes funções também são contínuas em x_0:

$$\begin{array}{ll} (1) & f+g \\ (2) & f-g \\ (3) & cf \\ (4) & fg \\ (5) & \dfrac{f}{g} \text{ se } g(x_0) \neq 0 \end{array} \qquad 10.33$$

10.8 Uma observação adicional

Ao calcular limites, muitas vezes, defrontamo-nos com expressões que envolvem $+\infty$ ou $-\infty$. Para operar com esses símbolos, salientamos que:

- $+\infty + (+\infty) = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $L\cdot(+\infty) = +\infty$ se $L > 0$
- $L\cdot(+\infty) = -\infty$ se $L < 0$
- $L\cdot(-\infty) = -\infty$ se $L > 0$
- $L\cdot(-\infty) = +\infty$ se $L < 0$
- $L + (+\infty) = +\infty$ se $L \in \mathbb{R}$
- $L + (-\infty) = -\infty$ se $L \in \mathbb{R}$
- $+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$
- $-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$
- $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

No cálculo de limites podemos nos defrontar com as chamadas formas indeterminadas ou indeterminações, que são as seguintes: $+\infty-(+\infty)$; $-\infty - (-\infty)$; $0 \cdot \infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$; 1^∞; 0^0 e ∞^0.

O que significa isso?

Um limite, ao ser resolvido, pode levar a uma expressão de um desses tipos, o que nos leva a ter de utilizar algum artifício para conseguir resolvê-lo.

De fato, um limite que seja da forma $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação, pois, a priori, não sabemos que resultado nos fornecerá. Pode dar qualquer coisa. Por exemplo,

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$ é da forma $\frac{0}{0}$, mas, resolvendo-o por simplificação, temos $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}$ é da forma $\frac{0}{0}$, mas, resolvendo-o por simplificação, temos $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}$ é da forma $\frac{0}{0}$, mas, resolvendo-o por simplificação, temos $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$;

e assim por diante.

Para cada um dos casos mencionados podemos criar exemplos simples para perceber que o resultado do limite pode ser qualquer um.

No cálculo de limites também é possível utilizar as Regras de L'Hospital, que serão apresentadas quando tivermos desenvolvido a derivada de uma função.

10.9 Propriedade da substituição direta

Se f for uma função polinomial ou racional e se o valor x_0 estiver no domínio de f, então, vale a substituição direta:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{10.34}$$

Esse fato é bastante evidente, pois uma função polinomial é contínua, bem como uma função racional, que é o quociente de duas funções polinomiais, é contínua em todo ponto de seu domínio – no qual o denominador não se anula.

10.10 Outros limites de interesse

De grande utilidade, muitas vezes, é o limite dos quocientes de funções quando x tende a zero, como é o caso de:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} \tag{10.35}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} \tag{10.36}$$

Em ambos os casos, tanto o numerador quanto o denominador tendem a zero no limite em que a variável independente tende a zero.

Para determinar o primeiro limite, notamos que, para valores de x no intervalo $0 < x < \pi/2$, valem as desigualdades resumidas na expressão abaixo:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \tag{10.37}$$

Dividindo a expressão acima por $\operatorname{sen} x > 0$, obtemos:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos\ x} \tag{10.38}$$

Considerando que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos\ x} = 1 \tag{10.39}$$

resulta, de **10.38** e aplicando o Teorema do Confronto, que:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \tag{10.40}$$

Analogamente, considerando $\pi/2 < x < 0$, mostramos que

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Como os limites laterais existem e são iguais, segue-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen } x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

que é o limite fundamental.

Consideremos agora o segundo limite proposto. Observamos que:

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{(\cos^2 x - 1)}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\text{sen}^2 x}{x(\cos x + 1)} \quad 10.41$$

Portanto, de **10.41**, obtemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}^2 x}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right) \frac{-\text{sen } x}{(\cos x + 1)} \quad 10.42$$

Levando-se em conta que o limite do primeiro fator é igual a 1 e que o limite da função sen é igual a zero quando x tende a zero, concluímos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad 10.43$$

10.11 Calculando limites

a. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 + 4} = 0$

É importante observar que ambos – numerador e denominador – têm limite real e o do denominador é diferente de 0. Sendo assim, trata-se de um limite imediato, aplicando a propriedade do limite do quociente.

b. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -2} \dfrac{(x-2)}{(x+1)} = 4$

Esse limite é da forma $\frac{0}{0}$; sendo assim, não é tão imediato, mas, por fatoração e sucessiva simplificação, é possível aplicar a propriedade do limite do quociente.

c. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x+3}{x^4-5x^2+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-3)}{(x-1)(x^3+x^2-4x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-3)}{(x^3+x^2-4x-4)}=\frac{1}{6}$$

Esse limite é da forma $\frac{0}{0}$; como $x = 1$ é raiz tanto do numerador quanto do denominador, ambos podem ser fatorados e, após a simplificação, chegamos a um limite imediato.

d. $$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=2x$$

Esse limite é semelhante aos anteriores: efetua-se a simplificação e, em seguida, o limite é imediato.

e. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Esse limite é da forma $\frac{0}{0}$; sendo assim, não é possível aplicar a propriedade do limite do quociente; multiplicamos o numerador e o denominador pela expressão conjugada do numerador, simplificamos e chegamos a um limite imediato.

f. $$\lim_{x\to 729}\frac{\sqrt{x}-27}{\sqrt[3]{x}-9}=\lim_{x\to 729}\frac{(\sqrt{x}-27)(\sqrt{x}+27)(\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}+81)}{(\sqrt[3]{x}-9)(\sqrt{x}+27)(\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}+81)}=$$

$$=\lim_{x\to 729}\frac{(x-729)(\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}+81)}{(x-729)(\sqrt{x}+27)}=\lim_{x\to 729}\frac{(\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}+81)}{(\sqrt{x}+27)}=$$

$$=\frac{81+81+81}{27+27}=\frac{9}{2}$$

Inicialmente, o limite é da forma $\frac{0}{0}$; sendo assim, não é possível aplicar a propriedade do limite do quociente; multiplicamos o numerador e o denominador por expressões convenientes, lembrando que

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

e que

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

e, em seguida, procedemos à simplificação e ao subsequente cálculo do limite, que ficou imediato.

g. $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Essa situação é semelhante: multiplicamos e dividimos pela expressão conjugada do numerador.

h. $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\left(\sqrt[3]{x+h}\right).\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\left(\sqrt[3]{x+h}\right).\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\left(\sqrt[3]{x+h}\right).\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\left(\sqrt[3]{x+h}\right).\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Neste caso, utilizamos o fato seguinte: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

i. $$\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^3}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{4+2x+x^2-12}{8-x^3}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2+2x-8}{8-x^3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)(x+4)}{(2-x)(4+2x+x^2)}\right]=-\frac{1}{2}$$

Neste caso, o limite não pode ser calculado diretamente, pois cada uma das frações não tem limite quando x tende a 2. Efetuamos as operações indicadas, lembrando novamente a fatoração

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$

até ser possível a simplificação e o limite se tornar imediato.

j. $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-2x+9}{15x^2+7x-8}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(15+\frac{7}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}=\frac{1}{15}$$

Um limite desse tipo é uma indeterminação da forma $\frac{\infty}{\infty}$. A fim de sair da situação de indeterminação, colocamos a maior potência de x em evidência para permitir a simplificação e usar o fato de que $\lim_{x\to +\infty}\frac{k}{x^n}=0$, sempre que k é uma constante e o expoente n é estritamente positivo.

k. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-7x+3}{\sqrt{x^4+x^2-4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}}=1$$

Esse limite é muito semelhante ao anterior, observando também o fato de que $\sqrt{x^4}=x^2$.

l. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right)^{25}=e^{25}$$

Lembrando que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, o limite se torna simples ao observar que $5x=\frac{x}{5}\cdot 25$.

m. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\cos x\right)=0$$

Esse limite é imediato, aplicando-se a Consequência do Teorema do Confronto.

n. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\operatorname{sen}x\right)=0$$

> **!** Convém observar que esse não é o limite fundamental!
> Para o cálculo desse limite novamente aplicamos a Consequência do Teorema do Confronto.

o. $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}15x}{\operatorname{sen}12x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\frac{\operatorname{sen}15x}{15x}}{\frac{\operatorname{sen}12x}{12x}}\cdot\frac{15x}{12x}\right]=\frac{15}{12}$$

Esse limite é uma aplicação quase imediata do limite fundamental.

p. $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1$$

Esse limite é também uma aplicação quase imediata do limite fundamental.

q. $$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x\left(x+2\right)}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x\left(x+2\right)}-x\right].\left[\sqrt{x\left(x+2\right)}+x\right]}{\left[\sqrt{x\left(x+2\right)}+x\right]}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+2)-x^2}{\left[\sqrt{x\left(x+2\right)}+x\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\left[\sqrt{x^2+2x}+x\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\left[\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+x\right]}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x.\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)}+1\right)}=1$$

Inicialmente, observamos que o limite dado é uma indeterminação da forma $\infty - \infty$ e, para sair dessa situação, multiplicamos e dividimos pelo conjugado da expressão cujo limite queremos calcular. Em seguida, após a simplificação, procedemos como é habitual em limites quando $x \to \infty$, observando que, como $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$.

r. $$\lim_{x\to+\infty}x.\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}x.\left[\ln\frac{(x+1)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=1$$

Começamos usando as propriedades do logaritmo e, em seguida, usamos o fato de a função ln ser contínua para chegar ao resultado final, lembrando que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.